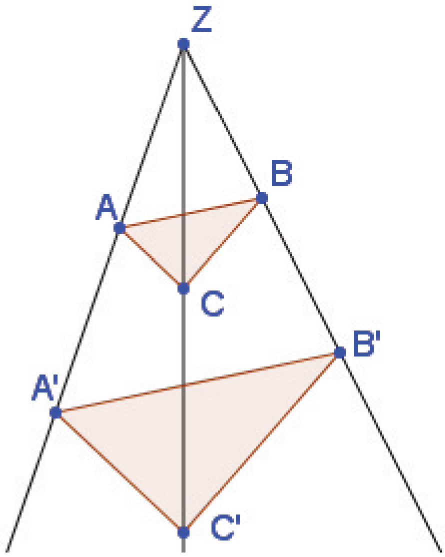
Zentrische Streckung

QR-Codes

Video Zentrische Streckung	Video Zentrische Streckung - Eigenschaften	Video Zentrische Streckung - Abbildungsvorschrift			

Zentrische Streckung

Die Zentrische Streckung ist eine **Ähnlichkeitsabbildung**, die zu jeder Figur eine ähnliche Figur erzeugt. Eine zentrische Streckung ist durch das **Streckzentrum Z** und den **Streckfaktor k** festgelegt.



Eigenschaften:

- Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.
- Für eine Strecke [AB] und ihre Bildstrecke [A'B'] gilt:
  $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$
- Gerade und Bildgerade sind parallel.
- Das Streckzentrum Z wird auf sich selbst abgebildet.
- Die Geraden durch Z werden auf sich selbst abgebildet.

Streckfaktor k

- $|k| > 1$ Man erhält ein vergrößertes Bild der Ausgangsfigur
- $0 < |k| < 1$ Man erhält ein verkleinertes Bild der Ausgangsfigur
- $k = 1$ Figur und Bildfigur stimmen überein
- $k = -1$ Die zentrische Streckung ist eine Punktspiegelung am Streckzentrum Z

Für positive k liegen Original- und Bildpunkt auf der Geraden durch Z auf der gleichen Seite von Z.

Für negative k liegen Original- und Bildpunkt auf der Geraden durch Z auf verschiedene Seiten von Z (Punktspiegelung am Zentrum).

Zeichnen

- Miss (oder berechne) den Abstand vom Zentrum aus zum entsprechenden Punkt.
- Multipliziere den Abstand mit Streckfaktor k.
- Zeichne den Bildpunkt ein. Ist k > 0, so liegt der Bildpunkt auf der gleichen Seite. Ist k < 0, so liegt der Bildpunkt auf der gegenüberliegenden Seite.

Streckfaktor k berechnen

- Miss (oder berechne) den Abstand vom Zentrum zum Ur- und Bildpunkt.
- Dividiere den Abstand vom Zentrum zum Bildpunkt durch den Abstand vom Zentrum zum Bildpunkt.
- Liegt der Bildpunkt auf der gleichen Seite wie der Urpunkt, so ist k > 0. Liegt der Bildpunkt auf der gegenüberliegenden Seite wie der Urpunkt, so ist k < 0.

Übungen

Runde, wenn nötig, auf **zwei Nachkommastellen**.
Schreibe die Gleichung immer erst **in dein Heft ab und löse sie dort.** Halte dich an die korrekte und vollständige Schreibweise.
Rechenzeit: jeweils 3 Minuten

1) Berechne die Gleichung der Tangente an der Parabel aus den folgenden Angaben.
   a) Büschelpunkt: P(5|3); Parabel: $y = x^2$
   b) Büschelpunkt: Q(-4|-2); Parabel: $y = 2x^2 - 2x$
   c) Büschelpunkt: P(4|10); Parabel: $y = 0{,}5x^2 + x - 2$
   d) Büschelpunkt: Q(1|2); Parabel: $y = 0{,}25x^2 + 2x - 4$

2) Gegeben ist die Parabel p mit $y = -x^2 + 4x - 2$ und das Geradenbüschel $g(m)$ mit $y = mx - 5m + 6$. Zwei Geraden des Büschels sind Tangenten an der Parabel. Berechne ihre Gleichungen.

3) Eine Parabel p ist durch die Funktionsgleichung $y = 2x^2 - 2x + 10$ festgelegt. Der Punkt T(2|10) ist Büschelpunkt eines Geradenbüschels $g(m)$. Ermittle rechnerisch die Gleichung der Tangenten t_1 und t_2.

4) Gegeben ist die Parabel p mit $y = -2x^2 - 4x$ und ein Geradenbüschel $g(m)$ mit $y = m \cdot (x - 1) + 3$.
   Ermittle rechnerisch die Gleichungen der Geraden, die Tangenten an die Parabel p sind.

5) Die Parabel p ist festgelegt durch die Funktionsgleichung $y = x^2 + 5$. Der Punkt P(1|2) ist Büschelpunkt eines Geradenbüschels $g(m)$.
   a) Ermittle rechnerisch die Gleichung der Tangenten t_1 und t_2.
   b) Gibt die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten mit der Parabel an.
   c) Für welche Steigungen m haben die Geraden des Büschels keine Schnittpunkte mehr mit der Parabel?

Schreibweise (für zwei Tangenten):
Bsp.: $p \rightarrow y = 2x^2 + 2x + 1$; Büschelpunkt P(4|2)

$y = m \cdot (x - 4) + 2$
$y = mx - 4m + 2$

$2x^2 + 2x + 1 = mx - 4m + 2 \quad | -mx + 4m - 2$
$2x^2 + 2x - mx + 4m - 1 = 0$
$2x^2 + (2 - m) \cdot x + 4m - 1 = 0$

$D = (2 - m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4m - 1)$
$D = 4 - 4m + m^2 - 32m + 8$
$D = m^2 - 36m + 12$

$0 = m^2 - 36m + 12$
$D_m = (-36)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1248$

$m_1 = \frac{-(-36)+\sqrt{1248}}{2 \cdot 1} = 35{,}66$
$m_2 = \frac{-(-36)-\sqrt{1248}}{2 \cdot 1} = 0{,}34$

$y_1 = 35{,}66 \cdot (x - 4) + 2$
$y_1 = 35{,}66x - 140{,}64$

$y_2 = 0{,}34 \cdot (x - 4) + 2$
$y_2 = 0{,}34x + 0{,}64$

Schreibweise (für eine Tangente):
Bsp.: $p \rightarrow y = x^2 + 2$; Büschelpunkt P(3|11)

$y = m \cdot (x - 3) + 11$
$y = mx - 3m + 11$

$x^2 + 2 = mx - 3m + 11 \quad | -mx + 3m - 11$
$x^2 - mx + 3m - 9 = 0$

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 9)$
$D = m^2 - 12m + 36$

$0 = m^2 - 12m + 36$
$D_m = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$

$m = \frac{-(-12)+\sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 6$

$y = 6 \cdot (x - 3) + 11$
$y = 6x - 7$

Schreibweise (für keine Tangente):
Bsp.: $p \rightarrow y = -x^2 + 5x$; Büschelpunkt P(1|-4)

$y = m \cdot (x - 1) - 4$
$y = mx - m - 4$

$-x^2 + 5x = mx - m - 4 \quad | -mx + m + 4$
$-x^2 + 5x - mx + m + 4 = 0$
$-x^2 + (5 - m) \cdot x + m + 4 = 0$

$D = (5 - m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (m + 4)$
$D = 25 - 10m + m^2 + 4m + 16$
$D = m^2 - 6m + 41$

$0 = m^2 - 6m + 41$
$D_m = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 41 = -128$

Es gibt keine Tangenten.

Lösungen:
1) a) $y_1 = 19{,}38x - 93{,}9; y_2 = 0{,}62x - 0{,}1$ b) $y_1 = 0{,}33x - 0{,}68; y_2 = -36{,}33x - 147{,}32$ c) $y = 5x - 10$
   d) keine Tangente
2) $y_1 = 1{,}21x^2 - 0{,}05; y_2 = -13{,}21x + 72{,}05$
3) $y_1 = 11{,}66x - 13{,}32; y_2 = 0{,}34x + 9{,}32$
4) $y_1 = 0{,}49x + 2{,}51; y_2 = -16{,}49x + 19{,}49$
5) a) $y_1 = 6x - 4; y_2 = -2x + 4$ b) $B_1(3|14); B_2(-1|6)$ c) $-2 < m < 6$