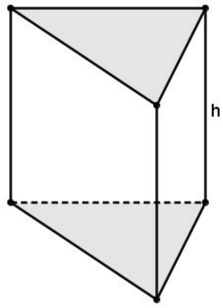
Körper

Das Volumen ist der räumliche Inhalt eines geometrischen Körpers. Übliches Formelzeichen ist **V**.

Prisma (FS S. 36)

Bei einem Prisma sind Grund- und Deckfläche kongruent, sowie die Seitenkanten parallel zueinander.



Volumen: $V = G \cdot h$

Mantefläche: $M = u \cdot h$

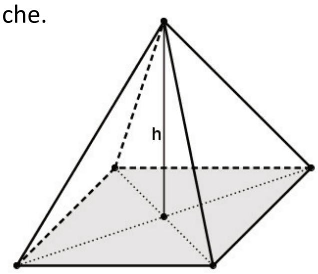
G = Grundfläche, h = Höhe;
u = Umfang der Grundfläche

Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M$

Spezialfall: Jeder **Würfel** und jeder **Quader** ist auch ein Prisma.

Pyramide (FS S. 37)

Jede Pyramide hat eine Spitze. Die Höhe der Pyramide ist der Abstand der Spitze zur Grundfläche.
(Abstand ≙ senkrecht)



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

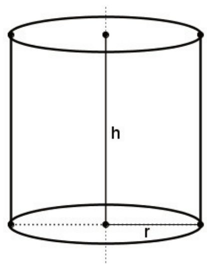
Mantelfläche: $M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

S_1; S_2; …; S_n sind die Flächeninhalte der Seitenflächendreiecke

Oberfläche: $O = G + M$

Gerader Kreiszylinder (FS S. 38)

Entspricht einem Prisma, nur mit einem Kreis als Grundfläche



Volumen: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

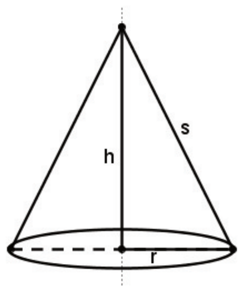
Mantelfläche: $M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

r = Radius

Oberfläche: $O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

Gerader Kreiskegel (FS S. 38)

Entspricht der Pyramide, nur mit einem Kreis als Grundfläche



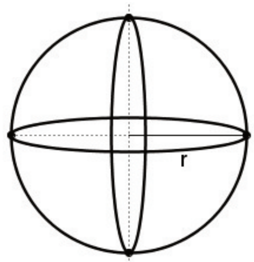
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Mantelfläche: $M = r \cdot \pi \cdot s$

r = Radius, s = Seitenkante

Oberfläche: $O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$

Kugel (FS S. 38)



Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

r = Radius

Oberfläche: $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

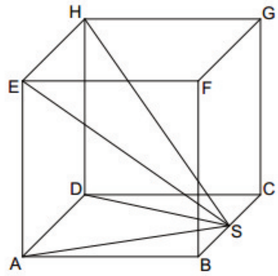
Satz des Cavalieri (für die aufgelisteten Körper)

Zwei Körper haben gleiches Volumen, wenn jeweils die Grund- und Deckflächen gleichen Flächeninhalt haben und die Körperhöhen gleich sind.

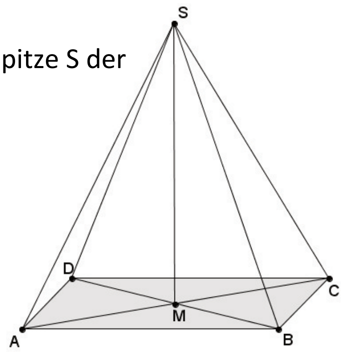
Erstelle Zeichnungen mit Bleistift und Lineal. Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

1) Berechne jeweils das Volumen folgender Körper.
   a) Würfel$_{ABCDEFGH}$: $\overline{AB} = 4\ cm$
   b) Quader: h = 7 cm; Grundfläche ist ein Rechteck mit Länge = 8 cm, Breite = 12 cm
   c) Pyramide: h = 10 cm; G = 25 cm²
   d) Zylinder: r = 8 cm; h = 4,5 cm
   e) Kegel: h = 90 cm; r = 7 cm
   f) Kugel: r = 6 cm
   g) Halbkugel: r = 20 cm

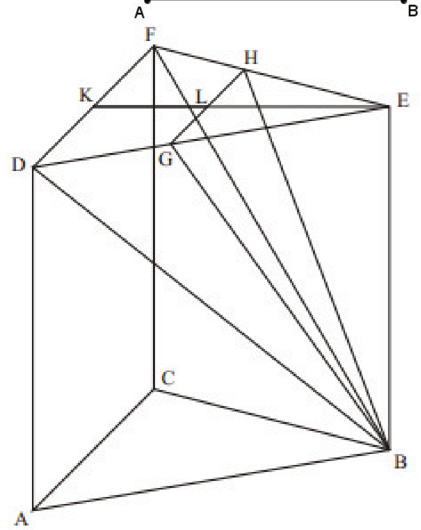
2) Das Prisma ABCDEF hat das rechtwinklige Dreieck ABC als Grundfläche.
   Es gilt: $\sphericalangle CBA = 90°$; $\sphericalangle FED = 90°$; $\overline{AB} = 4\ cm$; $\overline{BC} = 6\ cm$; $h = 20\ cm$
   Berechne das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche des Prismas ABCDEF.



3) Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des Würfels ABCDEFG, dem die Pyramide ADHES einbeschrieben ist. Die Spitze S der Pyramide ADHES liegt auf der Kante [BC] des Würfels ABCDEFG.
   Es gilt: $\overline{AB} = 8\ cm$; $\overline{BS} = 4\ cm$
   Berechne das Volumen des Würfels ABCDEFGH und der Pyramide ADHES sowie den prozentualen Anteil der Pyramide am Würfel.



4) Die Skizze zeigt die Pyramide ABCDS mit dem Rechteck ABCD als Grundfläche. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M.
   Es gilt: $\overline{AB} = 8\ cm; \overline{BC} = 5\ cm$; $\overline{MS} = 10\ cm$; [AB] liegt auf der Schrägbildachse;
   $\omega = 45°; q = 0{,}5$
   a) Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS.
   b) Berechne das Volumen der Pyramide.



5) Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas ABCDEF mit dem gleichseitigen Dreieck ABC als Grundfläche. Die Strecke [GH] mit $G \in [DE]$ und $H \in [FE]$ ist parallel zur Strecke [DF]. Die Punkte K und L sind die Mittelpunkte der Strecken [DF] und [GH]. Die Fläche DGHF ist die Grundfläche der Pyramide DGHFB mit der Spitze B.
   Es gilt: $\overline{AB} = 6\ cm$; $\overline{AD} = 6\ cm; \overline{KL} = 2\ cm$.

   Berechnen Sie das Volumen der Pyramide DGHFB.
   [Teilergebnisse: $\overline{GH} = 3{,}7\ cm$; $\overline{EL} = 3{,}2\ cm$]

Lösungen: 1a) 64cm³; b) 672 cm³; c) 83,33 cm³; d) 904,8 cm³; e) 4618,1 cm³; f) 904,8 cm³; g) 16755,2 cm³
2) 240 cm³; 3) V_Würfel = 512 cm³; V_Pyramide = 170,7 cm³; 33,3%
4) V_ABCDS = 133,3 cm³ 5) V_DGHFB = 19,4 cm³