Scan mich

Determinante

Als (zweireihige) Determinante bezeichnet man ein folgendes Schema:

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$$

u_x und u_y sind die Koordinaten eines Vektors $\vec{u}$.
v_x und v_y sind die Koordinaten eines Vektors $\vec{v}$.

Die Determinante kann dazu hergenommen werden, den Flächeninhalt von Parallelogrammen und Dreieck zu berechnen. Dafür gelten folgende Formeln:

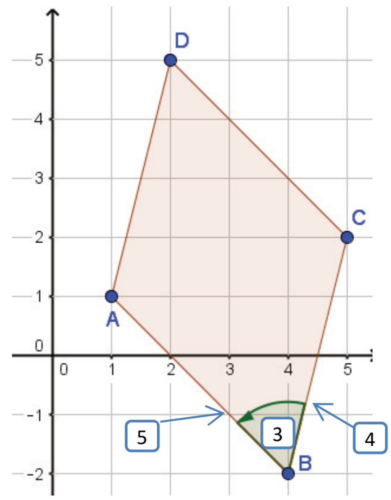
$$A_{Parallelogramm} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\, FE$$

$$A_{Dreieck} = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\, FE$$

Wann wird die Determinante benötigt?

Liegen die Seiten eines Dreiecks/Parallelogramms **nicht parallel** zu einer der Achsen des Koordinatensystems, so sollte man mit der Determinante rechnen.

Jedes Viereck/n-Eck lässt sich in Dreiecke zerteilen, so dass der Flächeninhalt der gesamten Figur aus der Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke gebildet werden kann.



Berechnen des Flächeninhalts (Parallelogramm)

Bsp.: Parallelogramm; A(1|1); B(4|-2); C(5|2)

1. Suche dir einen Fußpunkt aus.
   Sowohl der Fußpunkt, als auch die benachbarten Punkte müssen bekannt sein!
2. Stelle die Vektoren vom Fußpunkt zu den beiden benachbarten Punkten auf.
   (Spitze minus Fuß)
3. Zeichne in eine Skizze/die Zeichnung den Winkel beim Fußpunkt ein, der das Parallelogramm aufspannt. Zeichne ihn als Pfeil entgegen des Uhrzeigersinns.
4. Setze die Vektoren in die Determinanten ein.
   Beginne mit dem Vektor, der am Fuß des Winkelpfeils liegt.
5. Dann kommt der Vektor an der Spitze des Winkelpfeils.
6. Wandle gemäß der Flächenformel um.
7. Vereinfache soweit wie möglich.

So wird's geschrieben:
(Fußpunkt B)

- $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2
- $A_{ABCD} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$
  $= 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-3)$ 6
  $= 15\, FE$ 7

Berechnen des Flächeninhalts (Dreieck)

Wie beim Parallelogramm, nur dass der Faktor 0,5 dabei steht.

Funktionaler Flächeninhalt (Abhängigkeit von x)

Bsp: Dreieck; A(-2|-1); B(3|-2); C_n(x|0,5x+2)

Wie beim Parallelogramm, nur das die Vektoren und auch das Ergebnis die Variable x beinhalten.

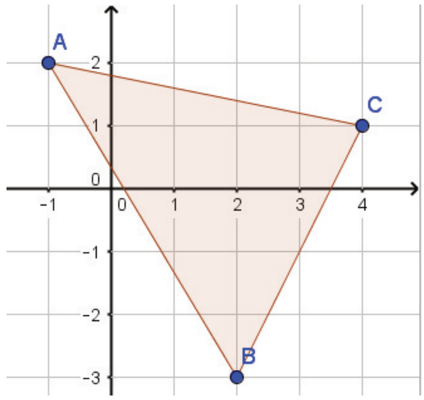
So wird's geschrieben:
(Fußpunkt A)

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x-(-2) \\ 0{,}5x+2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 0{,}5x+3 \end{pmatrix}$
- $A_{\mathrm{ABC_n}} = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ -1 & 0{,}5x+3 \end{vmatrix}$
  $= 0{,}5 \cdot [5 \cdot (0{,}5x+3) - (-1) \cdot (x+2)]$
  $= 0{,}5 \cdot [2{,}5x + 15 + x + 2]$
  $= 0{,}5 \cdot [3{,}5x + 17]$
  $= (1{,}75x + 8{,}5) FE$

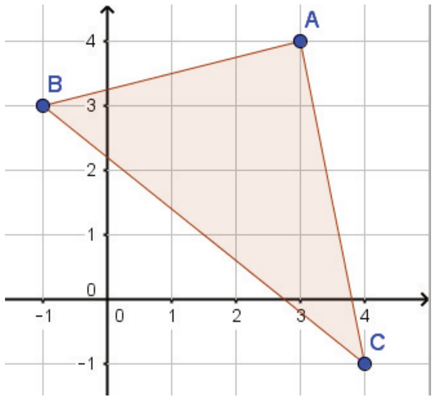
Übungen

Berechne den Flächeninhalt folgender Figuren mit Hilfe der Determinante.
Runde wenn nötig auf zwei Nachkommastellen.

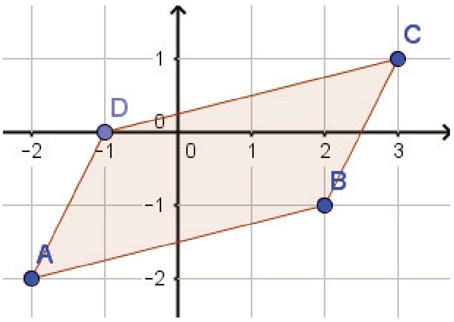
a) Dreieck; A(-1|2); B(2|-3); C(4|1)



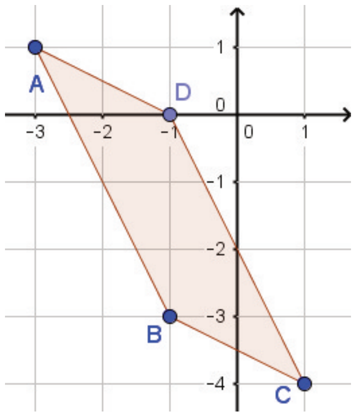
b) Dreieck; A(3|4); B(-1|3); C(4|-1)



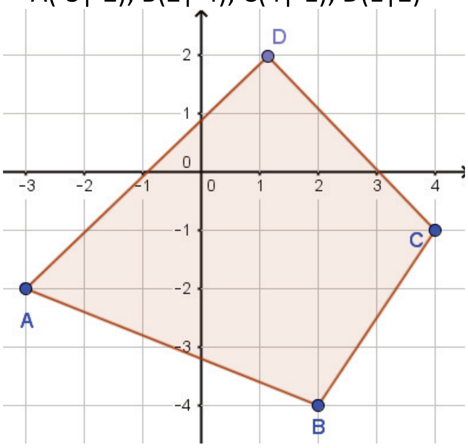
c) Parallelogramm: A(-2|-2); B(2|-1); C(3|1); D(-1|0);



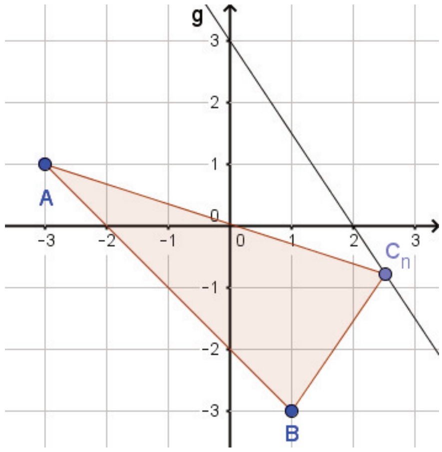
d) Parallelogramm: A(-3|2); B(-1|-3); D(-1|0)



e) Allgemeines Viereck:
A(-3|-2); B(2|-4); C(4|-1); D(1|2)



f) Dreieck: A(-3|1); B(1|-3); $C_n(x|-1{,}5x+3)$



Lösungen:
a) $A_{ABC} = 11\ FE$ b) $A_{ABC} = 10{,}5\ FE$ c) $A_{ABCD} = 7\ FE$ d) $A_{ABCD} = 6\ FE$ e) $A_{ABCD} = 21{,}36\ FE$ f) $A_{ABC_n} = (-x + 10)\ FE$