Rechnen mit Vektoren

Gegenvektor

Zu jedem Vektor gibt es einen Gegenvektor. Er verläuft in die genau entgegen gesetzter Richtung, ist aber ebenfalls gleich lang. Die Koordinaten des Gegenvektors haben genau entgegengesetzte Vorzeichen zum Vektor.

Beachte auch, dass beim Pfeil der Fußpunkt und die Spitze tauschen.

Der Gegenvektor ist die Umkehrabbildung und wird meist mit einem * gekennzeichnet.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}^* = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

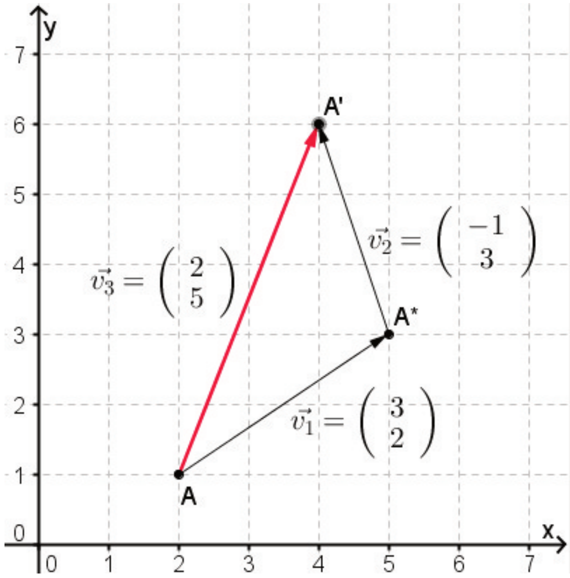
Vektoraddition

Ein Punkt A wird mit Hilfe eines Vektors auf Punkt A* verschoben und danach durch einen weiteren Vektor auf Punkt A‘. Es werden also zwei Parallelverschiebungen hintereinander durchgeführt.

Anstatt zwei Verschiebungen durchzuführen, kann man beide Verschiebungen zu einer verknüpfen. Dazu addiert man die Koordinaten der beiden Vektoren und erhält so einen dritten Vektor.

So kann der Punkt A gleich auf Punkt A‘ mit Hilfe des dritten Vektors verschoben werden.

Schreibweise: $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

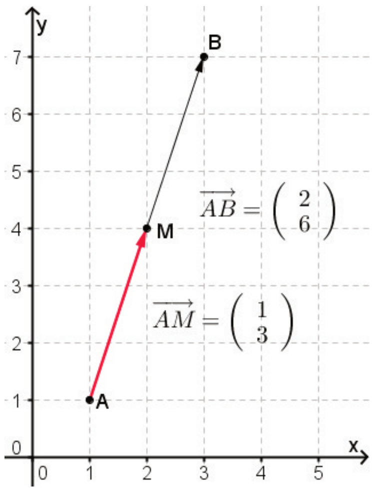


Mittelpunkt einer Strecke

Ist die Strecke [AB] gegeben und man soll die Koordinaten des Mittelpunktes bestimmen, so geht das mit Hilfe von Vektoren wie folgt:

1) Stelle den Pfeil von A nach B auf (Spitze minus Fuß)
2) Teile die x-Koordinate und die y-Koordinate durch 2. Dadurch erhält man einen neuen Pfeil.
3) Verschiebe Punkt A mit den Koordinaten des neuen Pfeils.

Um die Koordinaten des Mittelpunktes zu berechnen, addiere den Ortspfeil zu Punkt A mit dem Pfeil $\overrightarrow{AM}$. Dadurch erhältst du den Ortspfeil von M, der sich nun als Punkt aufschreiben lässt.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2:2 \\ 6:2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
M(2|4)

Übungen:

1) Bestimme die Gegenvektoren!

a) $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{DD'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ g) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ h) $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -16 \\ -3,5 \end{pmatrix}$

2) Der Punkt A wird um Vektor $\overrightarrow{v_1}$ auf A*und danach um $\overrightarrow{v_2}$ auf A‘ verschoben. Zeichne ein KoSy und trage Punkt A sowie die Verschiebungen ein. (Benutze verschiedene Farben)
Es gilt: LE = 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 5$; $-5 \leqq y \leqq 5$

a) A(3|2); $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) A(5|5); $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) A(-2|-3); $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Führe eine Vektoraddition durch bzw. addiere die Koordinaten der Pfeile.

a) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 32 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -33 \\ 22 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -64 \\ -98 \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 103 \\ 76 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -54 \\ -10 \end{pmatrix}$

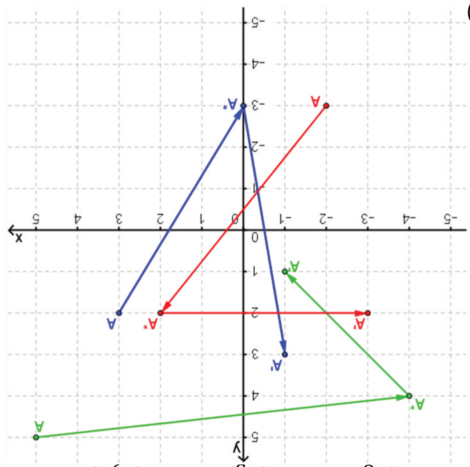
e) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 83 \\ 19 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -32 \\ 78 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ -23 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 39 \\ 53 \end{pmatrix}$

4) Berechne den Mittelpunkt folgender Strecken.

a) [AB]; A(3|2); B(10|12) b) [BC]; B(7|-3); C(8|2)
c) [PQ]; P(4|-9); Q(23|-1) d) [ST]; S(-0,5|-2); T(-0,9|-4)

1) $\overrightarrow{A'A} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{B'B} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C'C} = \begin{pmatrix} -17 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{D'D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -25 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_1^*} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2^*} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

2)



3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ 37 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -97 \\ -76 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 49 \\ -66 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 61 \\ 97 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 29 \\ 30 \end{pmatrix}$

4) a) M(6,5|7); b) M(7,5|-0,5); c) M(12,5|-5); d) M(-0,7|-3)