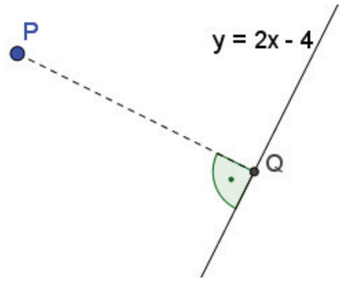
Abstand Punkt-Gerade

Scan mich

Ein Abstand bezeichnet immer die kürzeste Strecke eines Punktes zu einer Geraden. Daraus ergibt sich, dass diese Strecke immer senkrecht/orthogonal zur Gerade liegt. Dadurch kann man das Skalarprodukt anwenden, um einen Vektor zwischen Punkt und Gerade aufzustellen und damit die Länge des Vektors, also den Abstand bestimmen.



Bsp.: P(7|2); $y = 2x - 4$

a) Bestimme aus der Steigung der Geraden den ersten Vektor.
   Die x-Koordinate des Vektors ist 1, die y-Koordinate entspricht der Steigung der Geraden.
b) Bestimme den zweiten, dazu senkrechten Vektor. Dafür braucht man Punkt P, sowie einen noch unbekannten Punkt Q, der auf der Geraden liegen soll. Der Punkt Q hat (in diesem Fall) die Koordinaten $(x|2x-4)$. Die Strecke [QP] soll senkrecht auf der Geraden g stehen und entspricht dem Abstand des Punktes P zur Geraden g.
c) Stelle die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{QP}$ über „Spitze minus Fuß“ auf.
d) Führe die Skalarmultiplikation durch und setze diese gleich 0 (Voraussetzung für Orthogonalität).
e) Löse die dadurch entstandene Gleichung nach x auf. Der Wert von x entspricht der x-Koordinate des Punktes Q.
f) Setze den Wert für x in den Pfeil $\overrightarrow{QP}$ aus c) ein.
g) Berechne die Länge des Pfeils $\overrightarrow{QP}$ (über den Betrag; FS S.43) aus.
h) Der Wert entspricht dabei dem Abstand des Punktes zur Geraden.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $Q(x|2x-4)$

c) $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 7-x \\ 2-(2x-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-x \\ -2x+6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7-x \\ -2x+6 \end{pmatrix} = 0$

e) $\Leftrightarrow 1 \cdot (7-x) + 2 \cdot (-2x+6) = 0$
$\Leftrightarrow 7 - x - 4x + 12 = 0$
$\Leftrightarrow -5x + 19 = 0$
$\Leftrightarrow -5x = -19$
$\Leftrightarrow x = 3{,}8$

f) $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 7-3{,}8 \\ -2\cdot 3{,}8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$

g) $\overline{QP} = \sqrt{3{,}2^2 + (-1{,}2)^2} = 3{,}42$

Aufgaben:

1) Berechne den Abstand des Punktes zur Geraden.

a) P(8|3,5); $y = 5x + 1$ b) P(-3|-9); $y = -0{,}25x + 5$

c) P(-6|8); $y = x + 3$ d) P(3,5|0,75); $y = 0{,}5x - 1$

e) P(11|6); $y = 1{,}5x - 9$ f) P(2|-5); $y = 8{,}5x - 10$

g) P(-10|-4); $y = -3{,}5x - 2$ h) P(-6|-1); $y = 5{,}5x + 3$

i) P(-1|-5); $y = 8x - 4$ j) P(6|2); $y = -7{,}5x - 2$

k) P(-1|-9); $y = -9x - 1$ l) P(5|2); $y = -x - 3$

m) P(5|-9); $y = 4{,}5x + 8$ n) P(7|-2); $y = -0{,}5x + 6$

2) Die Punkte A(-3|5), B(0|-3) und C(7|-5) sind Eckpunkte von Drachenvierecken ABCD. Die Punkte A und C liegen auf er Symmetrieachse. Berechne die Länge der Diagonale [BD].

3) Unter den Vierecken AB_nCD_n mit A(-4|2), B(x|0,25x+1) und C(6|4) gibt es das Drachenviereck AB_1CD_1 mit Symmetrieachse AC. Die Diagonale $[B_1D_1]$ soll dabei durch den Mittelpunkt M der Strecke [AC] verlaufen. Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_1CD_1.

4) Überprüfe rechnerisch, ob es sich beim Viereck ABCD um ein Drachenviereck mit Symmetrieachse AC handelt.
A(-2|-0,5); B(1|-1); C(4|1); D(0,5|1)

Lösungen:
1)a) 7,35; b) 14,31; c) 7,78; d) d = 0, Punkt liegt auf der Geraden e) 0,83 f) 1,4 g) 10,17
h) 5,19 i) 0,87 j) 6,48 k) 1,88 l) 7,07 m) 8,57 n) 4,02
2) 7,21 3) 17,34 FE 4) MB = 1,22; MD = 0,85 -> kein Drachenviereck

