# Skalarprodukt

Scan mich

Bei einem Skalarprodukt werden zwei Vektoren miteinander multipliziert. Diese Multiplikation ergibt als Ergebnis eine reelle Zahl (auch Skalar genannt).

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht (= orthogonal) zueinander stehen bzw. man kann den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.

## Senkrechte Vektoren / Orthogonalität

Stehen zwei Vektoren (oder auch Pfeile) senkrecht zueinander, so hat das Skalarprodukt den Wert 0 und wird wie folgt berechnet.

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$$

### Liegen folgende Vektoren senkrecht zueinander?

Bsp. 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ Bsp. 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 18{,}9 \end{pmatrix}$

a) Stelle sofern nötig erst die beiden Vektoren/Pfeile auf.
b) Multipliziere die beiden Vektoren miteinander entsprechend der Formel.
c) Ist das Ergebnis 0, so sind die Vektoren/Pfeile senkrecht zueinander.

Beispiel 1
$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$
$= 5 \cdot 9 + 3 \cdot (-15) = 0$
→ senkrecht.

Beispiel 2
$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 18{,}9 \end{pmatrix}$
$= 0{,}5 \cdot (-3{,}5) + 2{,}7 \cdot 18{,}9 \neq 0$
→ nicht senkrecht.

### Welche/r Vektor/en liegt/liegen senkrecht zu einem gegebenen Vektor?

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{b_n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) Multipliziere die beiden Vektoren miteinander entsprechend der Formel.
b) Löse die Gleichung nach $y$ auf.
c) Du erhälst eine Gleichung, die alle möglichen Vektoren beschreibt, die senkrecht zum ursprünglichen Vektor liegen. Setze für $x$ eine beliebige Zahl ein (entspricht der x-Koordinate des Vektors), so erhäst du einen entsprechenden Wert für $y$ (entspricht der y-Koordinate des Vektors).

$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$= 7 \cdot x + 4 \cdot y = 0 \quad | -7x$
$\Leftrightarrow 4y = -7x \quad |:4$
$\Leftrightarrow y = -1{,}75x$

Für $x = 1$ folgt
$y = -1{,}75$
$\Rightarrow \overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}75 \end{pmatrix}$

## Winkel zwischen zwei Vektoren

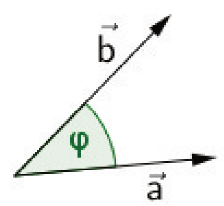
Um den Winkel zwischen Vektoren berechnen zu können, braucht man folgende Formel:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Setze die Koordinaten der Vektoren entsprechend in die Formel ein.
b) Berechne $\varphi$ entweder über Äquivalenzumformung oder über SOLVER.

Je nach Aufgabenstellung ist möglich, dass du den Winkel von 360° abziehen musst, um den richtigen Winkel zu erhalten. Vergleiche dein Ergbnis dazu mit deiner Zeichnung bzw. überlege, ob das Ergebnis sinnvoll ist.




$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}$

$= \dfrac{7 \cdot 5{,}5 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{7^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5{,}5^2 + (-4)^2}}$

$\cos\varphi = 0{,}62 \quad |\cos^{-1}$
$\varphi = 51{,}63°$

Aufgaben:

1) Zeige durch Rechnung, ob folgende Vektoren senkrecht zueinander liegen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ -5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6{,}75 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 5{,}9 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3{,}6 \\ -17{,}7 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) Berechne den zu $\vec{a}$ senkrechten Vektor.

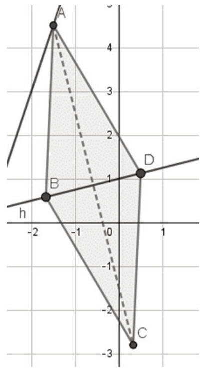
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ x+10 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}5x-4 \end{pmatrix}$

3) Überprüfe durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

a) A(-5|0); B(-1|-2); C(2|4); b) A(0|0); B(3|2); C(-2|9) c) A(-4|-2); B(2|-1,5); C(1|0,5)

4) Es gilt: O(0|0); Q(-5|3); $P_n$(x|-1,5x+10).
Im Dreieck $OP_nQ$ gilt: $\sphericalangle P_1OQ = 90°$. Berechne den zugehörigen Wert von x.




5) Die Diagonale $[B_nD_n]$ einer Raute $A_nB_nC_nD_n$ liegt auf der Geraden h mit $y = \frac{1}{4}x + 1$.
Gegeben sind Punkte $D_n$(x|0,25x+1) und $A_n$(x-2|3x+3).
Begründe, warum sich für $[A_nD_n] \perp h$ die obere Intervallgrenze x = 2,18 ergibt und bestätige dies durch Rechnung.

6) A(0|0) ist Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken $AB_nC_n$, wobei die Punkt $C_n(x|2x+8)$ auf der Geraden g mit $y = 2x + 8$ liegen. $[AC_n]$ ist Basis und die Basiswinkel haben das Maß 30°. Berechne die Koordinaten des Punkts $C_0$, für den das Dreieck $AB_0C_0$ minimalen Flächeninhalt hat.

7) Punkte $B_n$(x|-0,1x-2) liegen auf Geraden g mit $y = -0{,}1x - 2$. Sie sind zusammen mit A(0|0) sowie $C_n\left(x+3\middle|\frac{2}{5}x+1{,}2\right)$ und $D_n$ für x > -2,4 Eckpunkte von Drachenvierecken $AB_nC_nD_n$.
Die Dreiecke $AB_nC_nD_n$ sind bei $B_0$ und $B_1$ rechtwinklig. Berechne die zugehörigen Werte für x.

8) Berechne den Winkel zwischen den Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 9{,}7 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 6{,}2 \\ -2{,}2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7{,}2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

9) $\overrightarrow{AB_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\varphi + 5 \\ 3 \cdot \sin^2\varphi + 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
Berechne das Maß des Winkels $B_1AD_1$ für $\varphi = 60°$.

Lösungen:
1) a) Ja; b) Ja; c) Nein; d) Nein
2) a) $\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -12{,}5 \\ -2{,}25 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1{,}67 \\ -1{,}33 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4{,}31 \\ -1{,}85 \end{pmatrix}$
3) a) Ja b) Nein c) Ja
4) x = 3,16
5) B und D liegen dann auf [AC] -> $\overline{BD} = 0$; x = 2,18
6) $C_0$(-3,2|1,6)
7) x1 = 4,38; x2 = 29,22
8) a) 5,91°; b) 102,71°; c) 156,92°; d) 23,07°
9) 91,56°