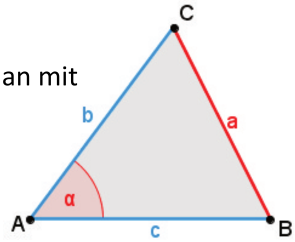
Cosinussatz

Beachte: Stelle deinen GTR auf DEG über [SETUP] $\longrightarrow B \longrightarrow Deg$

In jedem Dreieck stehen die Längen der Seiten im Verhältnis zu den Winkeln. So kann man mit entsprechenden Angaben fehlende Seiten oder Winkel berechnen.



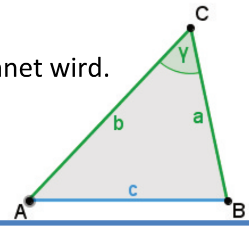
Cosinussatz

In jedem beliebigen Dreieck gilt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$

$$(\textbf{bzw.}\, b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \;\textbf{ oder }\; c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma)$$

Auf der linken Seite der Gleichung ist immer die Seite, die gegenüber dem Winkel liegt.

Der Cosinussatz wird immer dann benötigt, wenn mit drei Seiten und einem Winkel gerechnet wird.



Berechnen einer Seite mit dem Cosinunssatz

Bsp.: $a = 6\,cm; b = 4{,}5\,cm; c = ?\,; \gamma = 50°$

1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegebenen/gesuchten Seiten und Winkel farbig.
2. Beginne mit der Seite, die gegenüber dem gegebenen Winkel liegt.
3. Stelle die Gleichung auf und löse sie über
   a. Umformung/Vereinfachung/Berechnung der Wurzel

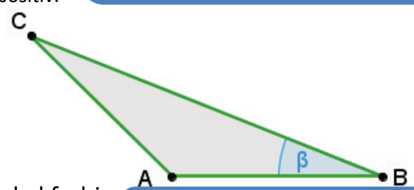
   oder

   b. [SOLVER]

   Beachte: Durch das „Hoch 2“ gibt es immer zwei Lösungen. Längen von Strecken sind immer positiv.

Gesucht: c
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

MZG:
$c^2 = 6^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 50$
$\Leftrightarrow c^2 = 21{,}54 \Leftrightarrow c = 4{,}64\,cm$
oder
$c^2 = 6^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 50$
$\rightarrow [SOLVER] \rightarrow c = 4{,}64\,cm$



Berechnen eines Winkels mit dem Cosinunssatz

Bsp.: $a = 14\,cm; b = 8\,cm; c = \ 7\,cm; \beta = ?$

1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegebenen/gesuchten Seiten und Winkel farbig.
2. Beginne mit der Seite, die gegenüber dem gesuchten Winkel liegt.
3. Stelle die Gleichung auf und löse sie über
   a. Umformung/Vereinfachung

   oder

   b. [SOLVER]

Gesucht: β
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

MZG:
$8^2 = 14^2 + 7^2 - 2 \cdot 14 \cdot 7 \cdot \cos\beta$
$\Leftrightarrow \cos\beta = \dfrac{8^2 - 14^2 - 7^2}{-2 \cdot 14 \cdot 7}$
$\Leftrightarrow \beta = 22{,}56°$
oder
$8^2 = 14^2 + 7^2 - 2 \cdot 14 \cdot 7 \cdot \cos\beta$
$\rightarrow [SOLVER] \rightarrow \beta = 22{,}56°$

Cosinussatz oder Sinussatz im allgemeinen Dreieck?

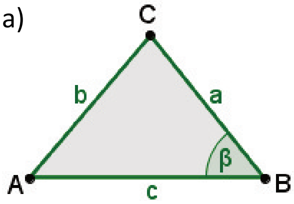
1. Mach dir zuerst eine Skizze oder schau dir die vorhandene Skizze an.
2. Markiere gegebene/gesuchte Seiten und Winkel am besten farbig.
3. Den einfachsten Rechenweg bekommst du mit folgenden Tipps (es gibt aber auch andere Wege):
   a. Sind eine Seite und zwei Winkel (dritter Winkel über Innenwinkelsumme) gegeben → Sinussatz
   b. Zwei Seiten und der Winkel (liegt gegenüber der größeren Seite) sind gegeben → Sinussatz
   c. Zwei Seiten und der Winkel liegt gegenüber der unbekannten Seite sind gegeben → Cosinussatz
   d. Sind drei Seiten gegeben → Cosinussatz

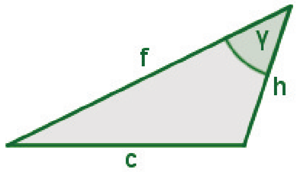
Tipps:

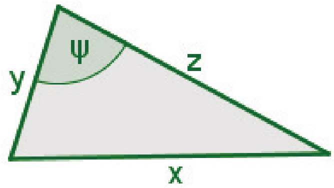
- Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist 180°. Damit lassen sich einfach Winkelmaße berechnen.
- Strecken und Winkel lassen sich auch mit Punkten angeben (Winkel entgegen des Uhrzeigersinns)
  - Strecken: $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{BC}$; …
  - Winkel: $\sphericalangle BAC\ (=\alpha)$; $\sphericalangle CBA\ (=\beta)$; $\sphericalangle ACB\ (=\gamma)$; …
- Denke daran, dass im Dreieck die Namen der Seiten und Winkel eine andere Reihenfolge haben wie im Vieleck.

Aufgaben: Runde wenn nicht anders angegeben auf zwei Nackommastellen

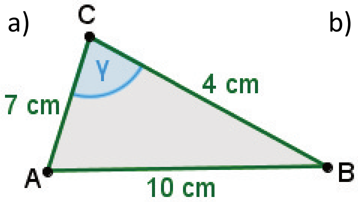
1) Stelle für folgende Dreiecke mit dem Cosinussatz passende Gleichungen auf.

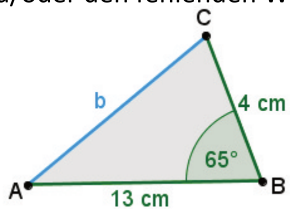
a) 

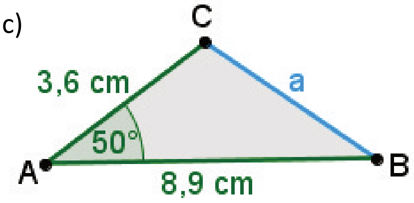
b) 

c) 

2) Berechne die fehlende Seite und/oder den fehlenden Winkel.

a) 

b) 

c) 

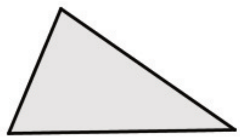
3) Skizziere das Dreieck ABC und berechne die fehlenden Größen.

a) $a = 4\ cm; b = 8\ cm; c = 7{,}5\ cm; \beta = ?$
b) $a = 3\ cm; b = 6\ cm; c = 7\ cm; \alpha = ?$
c) $a = ?; b = 8\ cm; c = 6{,}5\ cm; \alpha = 70°$
d) $a = 4\ cm; b = ?; c = 7{,}5\ cm; \beta = 90°$
e) $\overline{AB} = 6\ cm;\ \overline{BC} = 9\ cm;\ \overline{AC} = 5\ cm; \gamma = ?$
f) $\overline{AB} = 7\ m;\ \overline{BC} = 2\ m;\ \overline{AC} = 8{,}5\ m; \alpha = ?$
g) $\overline{BA} = 10\ m;\ \overline{BC} = ?;\ \overline{AC} = 15\ m; \alpha = 33°$
h) $\overline{CA} = 1\ m;\ \overline{CB} = ?;\ \overline{AB} = 1{,}5\ m; \alpha = 59°$

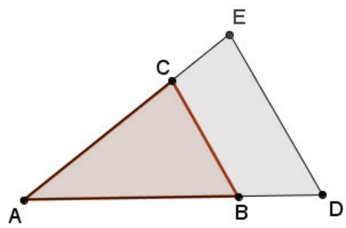
4) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke ABC.

a) $a = 12\ m; b = 9\ m; c = 8\ m$
b) $b = 7\ m; c = 3{,}7\ m; a = 4{,}3\ m$
c) $a = 19\ m; b = 23\ m; \gamma = 25°$
d) $c = 4\ m; b = 6\ m; \beta = 50°$

5) Nebenstehende Skizze zeigt ein Grundstück mit den Seitenlängen 50 m, 60 m und 70 m. Es soll gegen ein rechteckiges Grundstück mit gleichem Flächeninhalt getauscht werden. Die Länge des rechteckigen Grundstücks soll dabei doppelt so groß wie die Breite sein.
Berechne die Seitenlänge des rechteckigen Grundstücks.



6) Nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines dreieckigen Grundstücks. Zum Bau einer Straße muss ein Teil abgetreten werden. Die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ verkürzen sich dabei um jeweils ein Viertel ihrer ursprünglichen Länge.
Berechne den Inhalt A_{BDEC} der abgetretenen Fläche und gib an, um wie viel Prozent sich das Grundstück verkleinert hat.
Es gilt: $\overline{AD} = 75\ m;\ \overline{DE} = 60\ m;\ \overline{AE} = 89\ m.$



Lösungen:
1a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$; b) $c^2 = f^2 + h^2 - 2 \cdot f \cdot h \cdot \cos\gamma$; c) $x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos\psi$
2a) $\gamma = 128{,}68°$; b) $b = 11{,}88\ cm$; c) $a = 7{,}14\ cm$
3a) $\beta = 82{,}10°$ b) $\alpha = 25{,}21°$; c) $a = 8{,}41\ cm$; d) $b = 8.5\ cm$; e) $\gamma = 38{,}94°$; f) $\alpha = 9{,}84°$; g) $\overline{BC} = 8{,}57\ m$; h) $\overline{CB} = 1{,}31\ m$
4 Passenden Winkel berechnen a) $\alpha = 89{,}60°; A = 0{,}5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin 89{,}60°\ m^2 = 36{,}00\ m^2$
b) $\beta = 121{,}91°; A = 0{,}5 \cdot 3{,}7 \cdot 4{,}3 \cdot \sin 121{,}91°\ m^2 = 6{,}75\ m^2$; c) $A = 0{,}5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \sin 25°\ m^2 = 92{,}34\ m^2$
d) $\gamma = 30{,}71°; \alpha = 99{,}29°;\ A = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 99{,}29°\ m^2 = 11{,}84\ m^2$
5) $a = 50\ m; b = 60\ m; c = 70\ m; \alpha = 44{,}42°; A = 0{,}5 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \sin 44{,}42°\ m^2 = 1469{,}82\ m^2$
$A_{Rechteck} = Länge \cdot Breite = 2x \cdot x = 2x^2 = 1469{,}82\ m^2 \Leftrightarrow x^2 = 734{,}91 m^2 \Leftrightarrow x = 27{,}11\ m$
Länge = 54,22 m; Breite = 27,11 m
6) $\sphericalangle DAE = 41{,}84°; \overline{AB} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AD} = 56{,}25\ m; \overline{AC} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AE} = 66{,}75\ m;$

- $A_{ADE} = 0{,}5 \cdot 75 \cdot 89 \cdot \sin 41{,}84°\ m^2 = 2226{,}29\ m^2$
- $A_{ABC} = 0{,}5 \cdot 56{,}25 \cdot 66{,}75 \cdot \sin 41{,}84°\ m^2 = 1252{,}29\ m^2$;
- $A_{BDEC} = A_{ADE} - A_{ABC} = 974\ m^2$
- $x = \frac{100\,\%}{2226.29\ m^2} \cdot 974\ m^2 = 43{,}75\%$