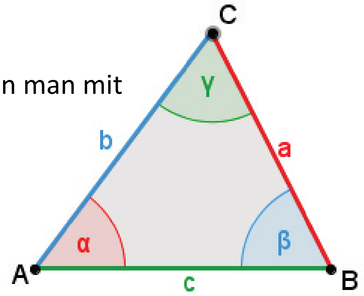
Sinussatz und Flächeninhalt

Beachte: Stelle deinen GTR auf DEG über [SETUP] $\rightarrow B \rightarrow Deg$

In jedem Dreieck stehen die Längen der Seiten im Verhältnis zu den Winkeln. So kann man mit entsprechenden Angaben fehlende Seiten oder Winkel berechnen.

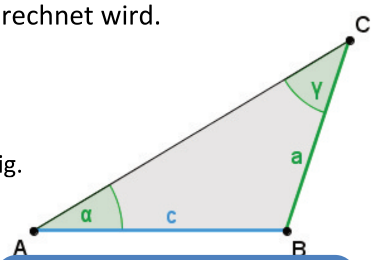


Sinussatz

In jedem beliebigen Dreieck gilt: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta};\ \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma};\ \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Dabei liegt die Seite a gegenüber des Winkels α (b gegenüber β und c gegenüber γ)
Der Sinussatz wird immer dann benötigt, wenn mit zwei Seiten und zwei Winkeln gerechnet wird.

Berechnen einer Seite



Bsp.: $a = 5\ cm;\ \ c = ?;\ \alpha = 30°;\ \gamma = 40°$

1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegebenen/gesuchten Winkel und Seiten farbig.
2. Starte mit der gesuchten Seite.
3. Teile durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels.
4. Setze gleich mit den beiden anderen bekannten Größen.
   Pass auf, dass du die Form $\frac{Seite}{\sin\sphericalangle} = \frac{Seite}{\sin\sphericalangle}$ hast.
5. Löse die Gleichung über
   a. Umformung

   oder

   b. [SOLVER]

Gesucht: c
$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$
$\rightarrow \frac{c}{\sin 40°} = \frac{5\ cm}{\sin 30°}$

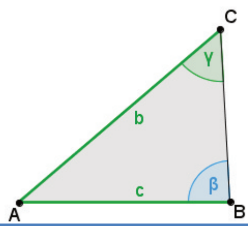
$c = \frac{5\ cm}{\sin 30°} \cdot \sin 40° = 6{,}43\ cm$

oder

$\frac{c}{\sin 40°} = \frac{5\ cm}{\sin 30°} \rightarrow [SOLVER]$

$\rightarrow c = 6{,}43\ cm$

Berechnen eines Winkels



Bsp.: $b = 4{,}5\ cm;\ \ c = 8{,}2;\ \beta = ?;\ \gamma = 53°$

1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegebenen/gesuchten Winkel und Seiten farbig.
2. Starte mit dem Sinus des gesuchten Winkels.
3. Teile durch die gegenüberliegende Seite.
4. Setze gleich mit den beiden anderen bekannten Größen.
   Pass auf, dass du die Form $\frac{\sin\sphericalangle}{Seite} = \frac{\sin\sphericalangle}{Seite}$ hast.
5. Löse die Gleichung über
   a. Umformung

   oder

   b. [SOLVER]

Gesucht: β
$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
$\rightarrow \frac{\sin\beta}{4{,}5\ cm} = \frac{\sin 53°}{8{,}2\ cm}$

$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 53°}{8{,}2} \cdot 4{,}5\right) = 25{,}99°$

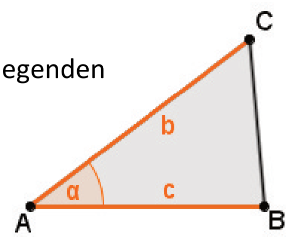
oder

$\frac{\sin\beta}{4{,}5\ cm} = \frac{\sin 53°}{8{,}2\ cm} \rightarrow [SOLVER]$

$\rightarrow \beta = 25{,}99°$

Beachte: Gilt der Kongruenzsatz SsW (FS S.30) nicht, kann es keine/zwei Lösungen geben.

Flächeninhalt eines Dreiecks über den Sinus



Der Flächeninhalt jedes Dreiecks lässt sich über einen Winkel und den an den Winkel anliegenden Seiten berechnen. Es gilt: $A = 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

(bzw.: $A = 0{,}5 \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$ **oder** $A = 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$)

Bsp.: $A = ?;\ a = 5\ cm;\ b = 7\ cm;\ \gamma = 65°$

1. Überprüfe, ob der Winkel und seine anliegenden Seiten bekannt sind.
2. Stelle die entsprechende Gleichung auf.
3. Löse die Gleichung.

$A = 0{,}5 \cdot 5\ cm \cdot 7\ cm \cdot \sin 65° = 15{,}86\ cm^2$

Anmerkung: Ist der Flächeninhalt gegeben, so kann man dadurch eine fehlende Seite oder einen fehlenden Winkel berechnen. Setze alle Größen in die Gleichung ein und löse durch Umformung oder [SOLVER].

Tipps:

- Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist 180°. Damit lassen sich einfach Winkelmaße berechnen.
- Strecken und Winkel lassen sich auch mit Punkten angeben (Winkel entgegen des Uhrzeigersinns)
  - Strecken: $\overline{AB};\ \overline{AC};\ \overline{BC};$ …
  - Winkel: $\sphericalangle BAC\ (= \alpha);\ \sphericalangle CBA\ (= \beta);\ \sphericalangle ACB\ (= \gamma);$ …

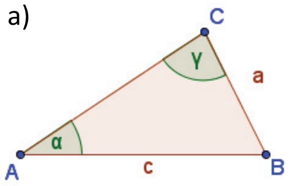
 BY-SA

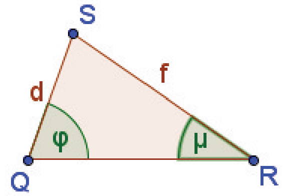
- Denke daran, dass im Dreieck die Namen der Seiten und Winkel eine andere Reihenfolge haben wie im Vieleck.

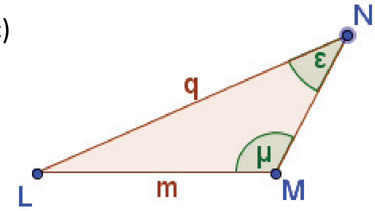
(cc) BY-SA

Aufgaben: Runde wenn nicht anders angegeben auf zwei Nachkommstellen.

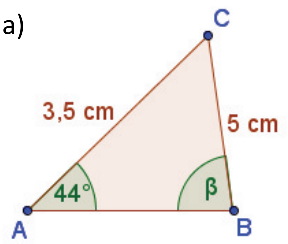
1. Stelle für folgende Dreiecke mit dem Sinussatz passende Gleichungen auf.

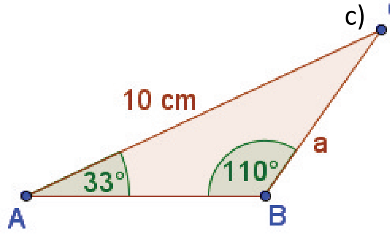
a) 

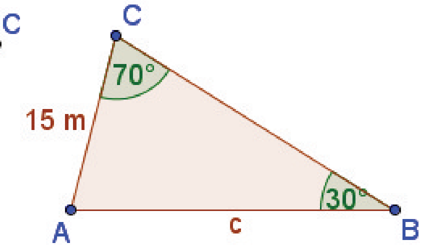
b) 

c) 

2. Berechne die angegebene Seite oder den angegebenen Winkel.

a) 

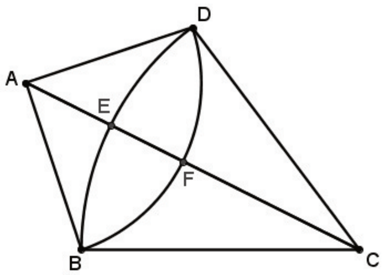
b) 

c) 

3. Skizziere das Dreieck ABC und berechne die fehlenden Größen.
   a) $a = 4\ cm; b = 7\ cm; \beta = 50°; \alpha = ?$ b) $c = 4{,}2\ cm;\ \gamma = 60°; \beta = 82°; b = ?$
   c) $a = 6\ cm; \alpha = 33°; \gamma = 43°; c = ?$ d) $b = 7\ cm; \beta = 60°; \alpha = 50°; c = ?$
   e) $\overline{AB} = 7\ cm;\ \overline{BC} = 5\ cm;\ \sphericalangle ACB = 70°;\ \sphericalangle BAC = ?$
   f) $\overline{AC} = 4{,}5\ cm;\ \sphericalangle CBA = 40°;\ \sphericalangle ACB = 90°;\ \overline{AB} = ?$
   g) $\overline{BC} = 6\ cm;\ \sphericalangle CBA = 80°;\ \sphericalangle ACB = 45°; \overline{AC} = ?$

4. Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke mit folgenden Angaben.
   a) $a = 4\ cm; b = 8\ cm; \gamma = 50°$ b) $a = 4\ cm; c = 3\ cm; \beta = 70°$
   c) $b = 7\ cm; c = 4{,}1\ cm; \alpha = 110°$ d) $\alpha = 30°; \beta = 53°; b = 5{,}5\ cm$

5. Die nebenstehende Skizze zeigt das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse AC.
   Es gilt: $\overline{BC} = 9\ cm;\ \sphericalangle DCB = 40°;\ \sphericalangle CBA = 110°$.
   Der Kreisbogen $\widehat{DFB}$ hat den Mittelpunkt A und schneidet die Strecke [AC] im Punkt F. Der Kreisbogen $\widehat{DEB}$ hat den Mittelpunkt C und schneidet die Strecke [AC] im Punkt E.
   Berechnen Sie die Länge der Strecke [AB] und bestimmen Sie sodann durch Rechnung den Flächeninhalt der Figur ABCFBE, die durch die Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CF}, \overline{EA}$ und die Kreisbögen $\widehat{DEB}$ und $\widehat{DFB}$ begrenzt wird. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.
   [Teilergebnis: $\overline{AB} = 4{,}0\ cm$]



Lösungen:

1a) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$; b) $\frac{d}{\sin\mu} = \frac{f}{\sin\varphi}$; c) $\frac{q}{\sin\mu} = \frac{m}{\sin\epsilon}$

2a) β = 29,10°; b) a = 5,80 cm; c) c = 28,19 cm

3a) α = 25,96°; b) b=4,80 cm; c) c = 7,51 cm; d) c = 7,60 cm; e) α=42,16°; f) $\overline{AB}$ = 7,00 cm; g) b = 7,21 cm

4a) A=12,26 cm²; b) A=5,64 cm²; c) A=13,48 cm²; d) γ=97°; mit Sinussatz zweite Seite berechnen a=3,44 cm; A=9,39 cm²

5) $\sphericalangle \boldsymbol{BAC} = 180° - \sphericalangle CBA - 0{,}5 \cdot \sphericalangle DCB = \mathbf{50°}$; $\frac{\overline{AB}}{\sin 0{,}5 \cdot \sphericalangle DCB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \sphericalangle BAC} \rightarrow \boldsymbol{\overline{AB} = 4{,}0\ cm}$; $\boldsymbol{A_{ABC}} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBA = \boldsymbol{16{,}9\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{Segment\ CDB}} = A_{Sektor\ CDB} - A_{\Delta CDB} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle DCB}{360°} - 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle DCB = \boldsymbol{2{,}2\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{Segment\ ABD}} = A_{Sektor\ ABD} - A_{\Delta ABD} = \overline{AB}^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \sphericalangle BAC}{360°} - 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AB} \cdot \sin(2 \cdot \sphericalangle BAC) = \boldsymbol{6{,}1\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{ABCFBE}} = \left(A_{ABC} - 0{,}5 \cdot A_{Segment\ CDB} - 0{,}5 \cdot A_{Segment\ ABD}\right) = \boldsymbol{12{,}8\ cm^2}$