Sinus, Cosinus, Tangens

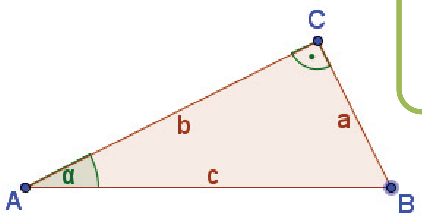
Scan mich

Beachte: Stelle deinen GTR auf DEG über [SETUP] $\longrightarrow B \longrightarrow Deg$

Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Die Längen der Dreiecksseiten sind abhängig vom Maß der spitzen Winkel. Dadurch ergeben sich folgende Verhältnisgleichungen:

- $\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}\ \left(=\frac{a}{c}\right)$
- $\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}\ \left(=\frac{b}{c}\right)$
- $\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}\ \left(=\frac{a}{b}\right)$



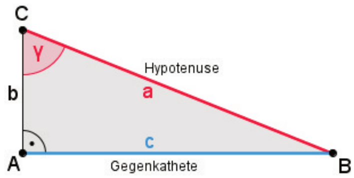
Für Winkel α gilt:
Die **Gegen**kathete liegt dem Winkel α **gegen**über.
Die **An**kathete liegt dem Winkel α **an**.
Die Hypotenuse ist die längste Seite.

Um den Winkel zu berechnen, benötigt man die Umkehrung $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right);\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right);\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

Beachte, dass je nachdem, wo der rechte Winkel liegt bzw. welcher Winkel gegeben ist, sich die Seitennamen und der Winkel in der Gleichung ändern.

Berechnen einer Dreiecksseite im rechtwinkligen Dreieck

Bsp.: $\gamma = 30°; \alpha = 90°; c = 5\ cm;\ a = ?$



1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegeben/gesuchten Winkel und Seiten farbig.
2. Überlege ausgehend vom gegebenen Winkel (< 90°), was Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse ist.
3. Stelle die entsprechende Verhältnisgleichung auf.
4. Löse die Gleichung über
   a. Umformung

   oder

   b. [SOLVER]

(Geg & Hyp ⟶ Sinus)
$\sin\gamma = \frac{Geg}{Hyp} \rightarrow \sin 30° = \frac{5\ cm}{a}$

$a = \frac{5\ cm}{\sin 30°} = 10\ cm$

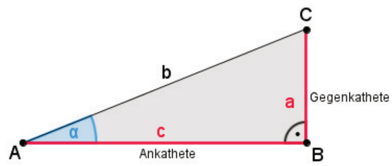
oder

$\sin 30° = \frac{5\ cm}{a} \rightarrow [SOLVER]$

$\rightarrow a = 2{,}5\ cm$

Berechnen eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck

Bsp.: $\alpha = ?;\ \beta = 90°; c = 8\ cm;\ a = 6\ cm$



1. Zeichne eine Skizze und markiere die gegeben/gesuchten Winkel und Seiten farbig.
2. Überlege ausgehend vom gegebenen Winkel (< 90°), was Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse ist.
3. Stelle die entsprechende Verhältnisgleichung auf.
4. Löse die Gleichung über
   a. Umformung/Umkehrung

   oder

   b. [SOLVER]

(An & Geg ⟶ Tangens)
$\tan\alpha = \frac{Geg}{An} \rightarrow \tan\alpha = \frac{6\ cm}{8\ cm}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = 36{,}87°$

oder

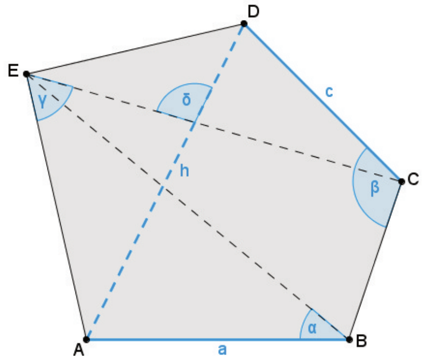
$\tan\alpha = \frac{6\ cm}{8\ cm} \rightarrow [SOLVER]$

$\rightarrow \alpha = 36{,}87°$

Tipps:
- Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist 180°. Damit lassen sich einfach Winkelmaße berechnen.
- Strecken und Winkel lassen sich auch mit Punkten angeben (Winkel entgegen des Uhrzeigersinns)
  - Strecken: $\overline{AB};\ \overline{AC};\ \overline{BC}$; …
  - Winkel: $\sphericalangle BAC\ (=\alpha);\ \sphericalangle CBA\ (=\beta);\ \sphericalangle ACB\ (=\gamma)$; …
- Sinus, Cosinus und Tangens funktionieren nur im rechtwinkligen Dreieck. Für allgemeine Dreiecke nutze den Sinussatz, Cosinussatz oder zeichne geschickt Hilfslinien oder Strecken ein, um rechtwinklige Dreiecke zu erhalten.
- Denke daran, dass im Dreieck die Namen der Seiten und Winkel eine andere Reihenfolge haben wie im Vieleck.

Aufgaben:

1) Die Skizze zeigt ein Vieleck. Benenne die angegebenen Winkel und Seiten mit Hilfe der Punkte.



2) Berechne folgende Werte: (MZG)

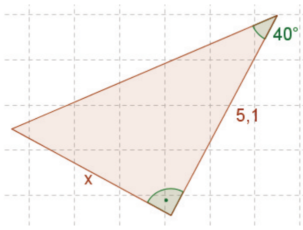
a) $\sin 30° = c$ b) $\sin 70° = \frac{a}{5}$ c) $\cos 78° = \frac{c}{7}$ d) $\cos 25° = \frac{3}{b}$

e) $\tan 33° = \frac{5}{d}$ f) $\tan 90° = a$ g) $\sin\alpha = 0{,}6$ h) $\sin\gamma = \frac{3}{9}$

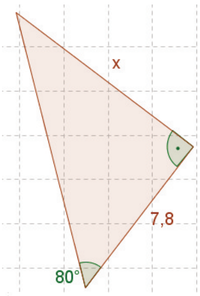
i) $\cos\beta = 1$ j) $\cos\delta = \frac{7{,}5}{12}$ k) $\tan\alpha = \frac{5}{4}$ l) $\tan\beta = 5$

3) Berechne die Länge der Seite oder das Maß des Winkels x: (Nicht maßstabsgetreu)

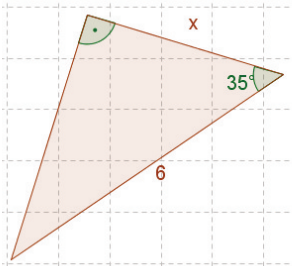
a)



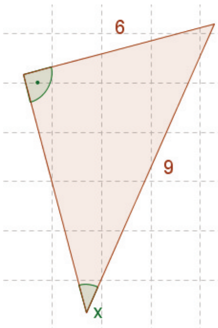
b)



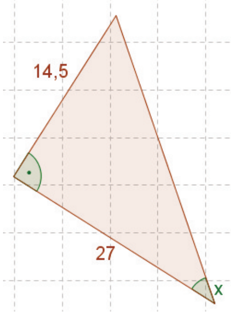
c)



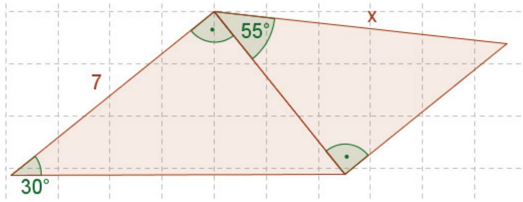
d)



e)



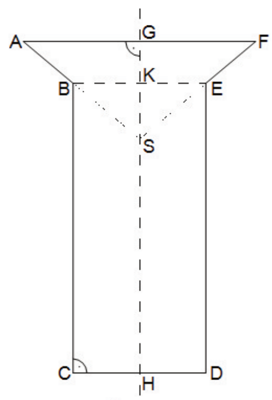
f)



4) Auf einer Schraubenpackung findet man die Aufgaben über den Schraubendurchmesser und die Schraubenlänge in Millimeter. Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt eines Schraubenrohlings. GH ist die Symmetrieachse.

Es gilt: $\overline{AF} = 9{,}0\ mm; \overline{CD} = 6{,}0\ mm; \overline{GH} = 10{,}0\ mm;\ \sphericalangle BAF = 30°$

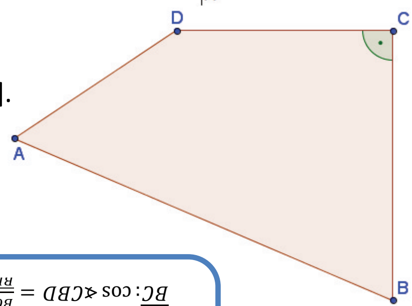
Berechne den Flächeninhalt des Querschnitts auf eine Stelle nach dem Komma. (Teilergebnis: $\overline{KS} = 1{,}7\ mm$)



5) Die Skizze zeigt das Viereck ABCD. Berechne die Länge der Strecke [CB].

Es gilt: $\overline{AD} = 5\ cm;\ \sphericalangle BAD = 40°;\ \sphericalangle CBA = 72°;$

$\sphericalangle ADB = 80°;\ \sphericalangle DCB = 90°.$



Lösungen:

1) $a = \overline{AB}; c = \overline{CD}; h = \overline{AD}; \alpha = \sphericalangle EBA;\ \beta = \sphericalangle DCB; \gamma = \sphericalangle CEA; \delta = \sphericalangle DFE$ (Benenne den Schnittpunkt)

2a) 0,5 b) 4,70 c) 1,46 d) 3,31 e) 7,70 f) - g) 36,87° h) 19,47° i) 0° j) 51,38° k) 51,34° l) 78,69°

3a) 4,28 b) 44,24 c) 4,91 d) 41,81° e) 28,24° f) (TE: 4,04); x = 7,05

4) $\overline{GS}$: $\tan 30° = \frac{\overline{GS}}{4{,}5\ mm}$; $\overline{KS}$: $\tan 30° = \frac{\overline{KS}}{3\ mm}$; $\overline{GK} = \overline{GS} - \overline{KS}$

$A = A_{Trapez} + A_{Rechteck} = 0{,}5 \cdot (\overline{AF} + \overline{BE}) \cdot \overline{GK} + \overline{CD} \cdot (\overline{GH} - \overline{GK}) = 61{,}35\ mm^2$

5) Punkt F ist Höhenfußpunkt im Dreieck ABD.

$\overline{DF}$: $\sin\sphericalangle BAD = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} \rightarrow \boldsymbol{\overline{DF} = 3{,}21\ cm}$; $\boldsymbol{\sphericalangle DBA} = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle ADB = \boldsymbol{60°}$

$\overline{BD}$: $\sin\sphericalangle DBA = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} \rightarrow \boldsymbol{\overline{BD} = 3{,}71\ cm}$; $\boldsymbol{\sphericalangle CBD} = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA = \boldsymbol{12°}$

$\overline{BC}$: $\cos\sphericalangle CBD = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \rightarrow \boldsymbol{\overline{BC} = 3{,}63\ cm}$